

Hypothetical Learning Trajectory Berkonteks Sedotan Untuk Mengajarkan Operasi Pengurangan Bagi Siswa Sekolah Dasar [Hypothetical Learning Trajectory Using Straws to Teach Subtraction to Elementary School Students]

Titah Pinasthi¹⁾, Mohammad Faizal Amir²⁾ (10pt)

^{1), 2)}Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar, Universitas Muhammadiyah Sidoarjo, Indonesia

*Email Penulis Korespondensi: faizal.amir@umsida.ac.id

Abstract. *Hypothetical Learning Trajectory (HLT), which is based on the straw context, was created as a manipulative medium to help elementary school students understand two-digit addition and subtraction procedures. This study involved an initial design stage, two cycles of experimental instruction, and retrospective analysis. HLT was designed to enable students to transition from concrete representations to symbolic understanding of place value, such as addition with and without carrying, and subtraction with and without borrowing. The results showed that straws helped students develop the concept of regrouping gradually, improved the accuracy of calculation strategies, and enhanced conceptual understanding, especially of the borrowing and carrying processes. Activities A through D demonstrate the alignment between actual and hypothetical learning trajectories and provide significant manipulative support for low-ability students. The results indicate that concrete bundling-based media such as straws are effective in improving understanding of number structure and can be used as an alternative to mathematics learning approaches in early elementary school classrooms.*

Keywords - *Hypothetical Learning Trajectory; subtraction operations; straws; elementary school mathematics learning*

Abstrak. *Hypothetical Learning Trajectory (HLT), yang berbasis konteks sedotan, dibuat sebagai media manipulatif untuk membantu siswa sekolah dasar memahami prosedur penjumlahan dan pengurangan dua digit. Studi ini melibatkan tahap desain awal, instruksi eksperimen dua siklus, dan analisis retrospektif. HLT dirancang untuk memungkinkan siswa beralih dari representasi konkret ke pemahaman simbolik tentang nilai tempat, seperti penjumlahan dengan dan tanpa menyimpan, dan pengurangan dengan dan tanpa meminjam. Hasil penelitian menunjukkan bahwa sedotan membantu siswa mengembangkan konsep regrouping secara bertahap, meningkatkan ketepatan strategi hitung, dan meningkatkan pemahaman konseptual, terutama tentang proses meminjam dan menyimpan. Aktivitas dari A hingga D menunjukkan kesesuaian antara lintasan belajar aktual dan hipotetis, dan memberikan dukungan manipulatif yang signifikan bagi siswa berkemampuan rendah. Hasil menunjukkan bahwa media konkret berbasis bundling seperti sedotan efektif meningkatkan pemahaman struktur bilangan dan dapat digunakan sebagai alternatif untuk pendekatan pembelajaran matematika di kelas awal SD.*

Kata Kunci - *Hypothetical Learning Trajectory; operasi pengurangan; sedotan; pembelajaran matematika SD*

I. PENDAHULUAN

Kemampuan berhitung dasar seperti pengurangan merupakan topik penting dalam pembelajaran matematika di pendidikan dasar. Penguasaan konsep ini menjadi syarat penting bagi perkembangan kompetensi matematika lanjutan, seperti perkalian, pembagian, serta pemahaman aljabar dan geometri dasar. Banyak penelitian menegaskan bahwa kesalahan konsep yang terjadi pada tahap awal, jika tidak segera ditangani, akan berdampak jangka panjang terhadap prestasi matematika siswa [1], [2], [3]. *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)* menekankan bahwa siswa usia dini perlu diberi kesempatan untuk memahami makna operasi bilangan melalui aktivitas konkret dan kontekstual agar terbentuk fondasi konseptual yang kuat [4]. Sejalan dengan hal tersebut, data PISA 2022 menunjukkan bahwa sebagian besar siswa Indonesia masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal numerik sederhana yang melibatkan penjumlahan dan pengurangan dua digit, yang mengindikasikan lemahnya penguasaan aritmetika dasar [5].

Pengajaran penjumlahan dan pengurangan dua digit, baik dengan maupun tanpa menyimpan dan meminjam, merupakan tahapan kritis dalam pembelajaran matematika dasar karena menuntut pemahaman nilai tempat (*place value*), ketepatan prosedur, serta strategi penyelesaian soal. [6] menunjukkan bahwa siswa yang tidak memahami perbedaan konseptual antara operasi tanpa menyimpan dan dengan menyimpan cenderung melakukan kesalahan prosedural secara berulang. Pengurangan dua digit dengan peminjaman, atau regrouping, adalah contoh utama dari masalah ini. Hal ini seringkali disebabkan oleh pemahaman yang buruk tentang konsep nilai tempat, bukan hanya ketidakmampuan untuk mengikuti prosedur. Oleh karena itu, pendekatan pedagogis yang dapat mengatasi transisi

konsep secara bertahap dan bermakna dengan menggunakan media manipulatif dan konteks konkret, yang telah terbukti membantu siswa memahami hubungan antarangka [7].

Salah satu aspek kritis dalam pengajaran operasi penjumlahan dan pengurangan adalah kemampuan membedakan antara penjumlahan dengan menyimpan dan tanpa menyimpan, serta pengurangan dengan dan tanpa meminjam. Pemahaman konseptual tentang proses regrouping (penyimpanan dan meminjaman) sangat diperlukan untuk menjamin ketepatan strategi hitung siswa [8]. Namun, siswa kelas awal SD seringkali hanya diajarkan algoritma formal tanpa memahami makna dari proses tersebut [9]. Pengetahuan siswa menjadi dangkal dan terfragmentasi karena kondisi ini. Akibatnya, mereka tidak dapat mengubah strategi saat menghadapi soal atau konteks numerik yang berbeda. Akibatnya, siswa sering mengandalkan hafalan langkah-langkah mekanis tanpa memahami alasan matematis di balik setiap prosedur. Metode yang hanya berfokus pada prosedur menyebabkan miskonsepsi dalam jangka panjang, menurut penelitian yang dilakukan [10], ini menunjukkan bahwa pendekatan prosedural gagal karena tidak dapat membangun hubungan yang signifikan antara gagasan tentang nilai tempat dan operasi bilangan. Sebaliknya, pendekatan konseptual membantu kita berpikir lebih fleksibel dan memahami angka dengan lebih baik. Oleh karena itu, perlu ada metode yang melihat perkembangan kognitif anak dan membantu mereka memahami arti matematik.

Konsep regrouping belajar seringkali disajikan secara abstrak, sehingga sulit dipahami siswa di kelas awal. Untuk mengatasi permasalahan tersebut, Hypothetical Learning Trajectory (HLT) telah banyak digunakan dalam berbagai studi sebagai kerangka perancangan pembelajaran bermakna yang menekankan urutan aktivitas belajar guna memungkinkan siswa mengonstruksi pemahamannya secara bertahap [11], [12]. Di sisi lain, sedotan sebagai alat konkret memiliki potensi tinggi untuk membantu siswa memahami proses regrouping dan borrowing secara eksplisit karena sifatnya yang mudah dikelompokkan dan dipindahkan secara fisik. Konteks konkret seperti sedotan atau bundel satuan-puluhan terbukti mampu meningkatkan daya tangkap siswa terhadap makna regrouping, khususnya pada operasi dua digit [13].

Meskipun demikian, kajian-kajian terdahulu cenderung membahas HLT sebagai kerangka desain pembelajaran atau penggunaan manipulatif konkret sebagai strategi representasional secara terpisah. Integrasi sistematis antara HLT dan konteks manipulatif konkret, khususnya sedotan, dalam pembelajaran pengurangan dua digit dengan meminjaman belum banyak dieksplorasi secara mendalam. Padahal, melalui perancangan lintasan belajar berbasis HLT yang secara sengaja memanfaatkan straw context, siswa tidak hanya melakukan aktivitas manipulatif, tetapi juga diarahkan untuk merefleksikan strategi dan makna matematis di balik proses regrouping. Dengan demikian, terdapat celah penelitian yang menegaskan perlunya pengembangan dan pengujian HLT berbasis manipulatif konkret untuk pembelajaran pengurangan dua digit, sebagai upaya menjembatani abstraksi konsep dengan pengalaman belajar yang bermakna dan kontekstual [14].

Kerangka *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) adalah salah satu contoh desain instruksional yang sistematis dan terstruktur yang diperlukan untuk memastikan bahwa pembelajaran berhasil. Dalam penelitian ini, HLT dianggap sebagai alat analitis dan perancangan pembelajaran yang dapat memetakan tujuan pembelajaran, merancang rangkaian aktivitas matematika, dan mengantisipasi strategi dan respons yang mungkin digunakan siswa selama proses belajar [15]. Dengan HLT, guru dan peneliti dapat lebih memahami perkembangan berpikir siswa dan menemukan masalah konseptual penting yang muncul, terutama dalam pengurangan dua digit. HLT sangat penting dalam mengarahkan desain aktivitas berbasis konteks manipulatif agar sesuai dengan pemahaman matematis siswa. Ini dilakukan sebagai kerangka penelitian pengembangan pembelajaran. Metode ini memungkinkan analisis yang lebih sistematis tentang bagaimana aktivitas, strategi siswa, dan tujuan pembelajaran yang ingin dicapai berinteraksi satu sama lain. Penelitian sebelumnya menunjukkan bahwa HLT yang dirancang dengan mempertimbangkan konteks manipulatif berhasil meningkatkan pemahaman konsep matematika dasar dan mendukung pembelajaran yang bermakna [16], [17], [18].

Studi sebelumnya juga menemukan bahwa pengembangan Jalan Pembelajaran Hypothetical (HLT) memiliki peran penting dalam pembelajaran matematika dasar, khususnya materi operasi penjumlahan dan pengurangan. Keberhasilan pembelajaran sangat dipengaruhi oleh kejelasan tahapan HLT dan keterkaitannya dengan konteks nyata yang dekat dengan pengalaman siswa [19]. Riset dari [20] mengemukakan bahwa HLT yang dirancang melalui tahapan nilai tempat secara bertahap dengan memanfaatkan objek konkret dan LKS mampu memprediksi respons siswa sekaligus membantu guru menyiapkan strategi antisipatif. Selanjutnya, [21] dalam ZDM Mathematics Education mendokumentasikan bagaimana HLT memfasilitasi pergeseran strategi siswa dari konkret menuju abstrak melalui intervensi pembelajaran yang terstruktur. Temuan ini diperkuat oleh [22] yang menegaskan bahwa desain HLT berperan penting dalam menyusun urutan aktivitas pembelajaran yang logis dan sesuai dengan perkembangan kognitif anak. Penelitian terkini oleh [23] juga menunjukkan bahwa penerapan HLT mampu meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematika dasar siswa SD dengan menekankan interkoneksi antar konsep.

Meskipun berbagai penelitian telah mengkaji efektivitas HLT dan penggunaan alat konkret secara terpisah, kajian yang secara spesifik mengintegrasikan HLT dalam pembelajaran operasi penjumlahan dan pengurangan dua digit dengan manipulatif konkret seperti sedotan masih terbatas. Sebagian besar penelitian HLT lebih banyak difokuskan pada topik geometri, bilangan tunggal, atau pola, sementara strategi regrouping pada operasi dua digit jarang menjadi objek utama pengembangan lintasan belajar [24]. Di sisi lain, penelitian empiris mengenai efektivitas alat bantu konkret seperti sedotan dalam memfasilitasi pemahaman regrouping telah dilakukan, tetapi belum banyak yang secara eksplisit dirancang dalam kerangka HLT [25]. Oleh karena itu, penelitian ini berkontribusi untuk mengisi celah tersebut dengan mengembangkan dan mengkaji HLT berbasis manipulatif konkret dan kontekstual guna mendukung pemahaman regrouping pada operasi penjumlahan dan pengurangan dua digit di sekolah dasar.

Penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan Hypothetical Learning Trajectory (HLT) berdasarkan konteks sedotan sebagai media manipulatif dalam mengajarkan operasi penjumlahan dan pengurangan dua digit kepada siswa sekolah dasar. Tujuan utama artikel ini adalah untuk membuat dan mengevaluasi jalan pembelajaran yang dapat membantu siswa memahami konsep regrouping melalui aktivitas yang bermanfaat. Salah satu hasil dari penelitian ini adalah bahwa itu menawarkan alternatif desain pembelajaran berbasis konteks konkret yang dapat membantu siswa memahami konsep dengan lebih baik. Studi ini juga memberi guru referensi untuk membangun metode pembelajaran matematika yang lebih interaktif, kontekstual, dan sesuai dengan perkembangan kognitif siswa di sekolah dasar.

II. METODE

Penelitian ini menggunakan pendekatan *Design Research* yang merujuk pada kerangka penelitian desain yang dikembangkan oleh [26]. Pendekatan ini dipilih karena memungkinkan pengembangan, pengujian, dan penyempurnaan desain pembelajaran secara berkelanjutan dalam konteks kelas nyata. Secara operasional, penelitian dilaksanakan melalui tiga tahap utama, yaitu desain awal, eksperimen pengajaran, dan analisis retrospektif. Ketiga tahap tersebut berkonsentrasi pada pembuatan dan pengujian Hypothetical Learning Trajectory (HLT), yang berfokus pada pembelajaran operasi penjumlahan dan pengurangan di sekolah dasar dengan menggunakan sedotan sebagai media konkret. Oleh karena itu, penelitian desain tidak hanya memberikan kerangka metodologis, tetapi juga memastikan bahwa HLT yang dikembangkan relevan, berguna, dan responsif terhadap cara siswa memahami konsep regrouping dalam praktik pembelajaran.

Desain awal, tahap awal penelitian, berfokus pada persiapan HLT, yang merupakan dasar pembelajaran. Pada titik ini, peneliti meninjau literatur tentang masalah umum yang dihadapi siswa dalam memahami operasi bilangan dan mengintegrasikan konteks sedotan sebagai representasi konkret. Sedotannya mudah dimanipulasi dan mudah dipahami oleh anak-anak, sehingga menjadi pilihan yang baik. Ini terutama berlaku untuk konsep bilangan sebagai objek yang dapat ditambahkan atau dikurangkan secara fisik. Hasil kajian literatur serta identifikasi hambatan belajar [27], [28] dijadikan dasar dalam merancang urutan aktivitas belajar, tujuan pembelajaran, dan dugaan HLT siswa yang dituangkan dalam bentuk portofolio hasil belajar berupa Lembar Kegiatan Siswa (LKS) dan lembar observasi.

Setelah tahap desain awal yaitu preliminary design, penelitian dilanjutkan dengan pelaksanaan tahap teaching experiment yang terbagi menjadi dua siklus. Tujuan dari siklus pertama adalah untuk menentukan validitas desain awal HLT. Data dikumpulkan melalui pengamatan langsung di kelas dan percakapan reflektif dengan guru. Setelah hasil siklus pertama, beberapa elemen HLT dan alat pembelajaran diperbaiki. Kemudian, desain yang diperbarui digunakan lagi pada siklus kedua. Fokus utama adalah melihat bagaimana konteks sedotan membantu siswa memahami konsep penjumlahan dan pengurangan. Mereka dapat menunjukkan angka dengan mengurangi jumlah sedotan atau menafsirkan penjumlahan angka secara visual.

Setelah implementasi, analisis retrospektif dilakukan untuk mengevaluasi efektivitas HLT yang telah diterapkan. Pada tahap ini, data yang dikumpulkan, seperti portofolio berupa hasil lembar kerja, catatan observasi, dokumentasi visual, dan wawancara dengan siswa dan guru, dianalisis secara kualitatif menggunakan pendekatan [29], yang meliputi pengurangan data, penyajian data, dan penarikan kesimpulan. Proses analisis ini bertujuan untuk melihat sejauh mana pembelajaran aktual sesuai atau berbeda dengan HLT yang dirancang, serta untuk memahami dinamika pembelajaran yang terjadi di kelas. Peneliti juga mengidentifikasi momen penting dalam proses pembelajaran yang menunjukkan perubahan pemahaman siswa, misalnya ketika mereka mulai bisa menjelaskan perbedaan antara penjumlahan dua digit bilangan tanpa menyimpan dan dengan menyimpan serta pengurangan dua digit bilangan tanpa meminjam dan dengan meminjam melalui konteks sedotan.

Sekolah Dasar Negeri Wonoprintan 2 terletak di daerah pedesaan di Jawa Timur, Indonesia. Studi ini dilakukan di sana. Subjek penelitian adalah siswa kelas satu yang rata-rata berusia 7 tahun. Sebelum penelitian dilakukan, kepala sekolah dan guru kelas serta persetujuan tertulis dari orang tua diperlukan. Untuk menjaga standar moral, identitas siswa dirahasiakan, dan partisipasi siswa adalah sukarela tanpa konsekuensi akademik.

Pengumpulan data dalam penelitian ini dilakukan melalui penilaian formatif dan pengamatan mendalam terhadap proses pembelajaran matematika siswa. Selama proses pembelajaran, data tambahan diperoleh dari portofolio pembelajaran berupa Lembar Kerja Siswa (LKS) dan pengamatan guru terhadap cara siswa menebak saat menyelesaikan tugas di HLT. Proses ini memungkinkan peneliti untuk secara dinamis menyelaraskan HLT dengan perkembangan pemahaman siswa. Penyesuaian HLT dilakukan secara berkelanjutan untuk memastikan setiap aktivitas dapat memicu pemahaman konseptual yang ditargetkan. Aktivitas dan butir soal yang dirancang berdasarkan HLT ini tersaji secara rinci dalam Tabel 1.

Tabel 1. Kegiatan dan item tugas untuk HLT

Aktivitas	Sub Aktivitas	Item Tugas
A. Mengidentifikasi awal konteks sedotan sebagai objek konkret	A. 1 Mengelompokkan sedotan menjadi bundel yang masing-masing berisi 10 sedotan (puluhan)	Siswa mengikat setiap 10 sedotan menjadi 1 bundel dan menghitung berapa bundel puluhan yang terbentuk.
	A. 2 Mengartikan bahwa sedotan yang jumlahnya kurang dari 10 dan tidak dibundel sebagai satuan	Siswa mengelompokkan sedotan yang tidak mencapai 10 ke kategori "satuan" dan menyebutkan jumlah satuan tersebut dalam bentuk angka
B. Mengidentifikasi nilai tempat dua digit bilangan	B. Representasi bilangan dua digit dengan sedotan	Siswa diminta menyusun angka seperti 23 dengan menggunakan bundel (puluhan) dan satuan sedotan
C. Memahami konsep operasi hitung penjumlahan dua bilangan	C.1 Menemukan penjumlahan dua digit bilangan tanpa menyimpan yang hasil satuannya < 10	Siswa melakukan penjumlahan seperti $21 + 32$ dengan menyatukan dua kelompok sedotan
	C.2 Menemukan penjumlahan dua digit bilangan dengan menyimpan yang hasil satuannya ≥ 10	Siswa mencoba $28 + 17$: satuan menjadi 15 (10 dibuat bundel baru) dan 5 tetap sebagai satuan
D. Memahami konsep operasi hitung pengurangan dua bilangan	D.1 Menemukan pengurangan dua digit bilangan tanpa meminjam yang hasil satuannya ≥ 0	Siswa menyelesaikan $54 - 23$ dengan mengambil langsung satuan dan puluhan dari representasi sedotan
	D.2 Menemukan pengurangan dua digit bilangan dengan meminjam yang hasil satuannya < 0 sebelum dipinjam	Siswa mencoba $42 - 19$: tidak cukup satuan \rightarrow memecah 1 bundel puluhan menjadi 10 satuan

Pada tabel 1, terdapat empat aktivitas: Aktivitas A, B, C, dan D. Aktivitas A, C dan D terdiri dari sub-sub aktivitas yang disatukan sebagai aktivitas yang akan diterapkan sebagai desain HLT. Setiap desain menggambarkan aktivitas yang menjadi alat bantu untuk memahami operasi hitung penjumlahan dan pengurangan. Setiap aktivitas memiliki dugaan HLT yang membedakan siswa berkemampuan tinggi, sedang, dan rendah. Yang akan disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2. Dugaan *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT)

Aktivitas	Sub Aktivitas	Dugaan HLT
A	A.1	Siswa menduga bahwa setiap 10 sedotan dapat diikat menjadi 1 bundel, sehingga bisa dihitung sebagai puluhan.
	A.2	Siswa menduga bahwa sedotan yang tidak mencapai 10 disebut sebagai satuan dan dapat dihitung terpisah dari bundel puluhan.
B	B	Siswa menduga bahwa angka seperti 23 terdiri dari 2 bundel sedotan (puluhan) dan 3 sedotan tunggal (satuan).
C	C.1	Siswa menduga bahwa untuk menjumlahkan, satuan dijumlahkan dengan satuan, puluhan dijumlahkan dengan puluhan, tanpa perlu membuat bundel baru jika hasil satuannya kurang dari 10.
	C.2	Siswa menduga bahwa jika jumlah satuan mencapai 10 atau lebih, maka 10 satuan dapat dibuat bundel baru dan ditambahkan ke puluhan.
D	D.1	Siswa menduga bahwa pengurangan dapat dilakukan langsung dengan mengambil sejumlah puluhan dan satuan jika pengurangannya lebih kecil dari bilangan yang dikurangi pada posisi yang sama.
	D.2	Siswa menduga bahwa angka seperti 23 terdiri dari 2 bundel sedotan (puluhan) dan 3 sedotan tunggal (satuan).

Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini meliputi observasi langsung dengan menggunakan lembar observasi terstruktur, dokumentasi video dan foto aktivitas pembelajaran, portofolio yang berupa hasil kerja siswa (LKS), serta wawancara dengan siswa dan guru setelah pembelajaran. Prosedur observasi mengikuti pendekatan yang digunakan oleh [28], [30], yang menekankan pengamatan terhadap interaksi siswa dengan alat konkret dan strategi penyelesaian masalah yang mereka gunakan. Analisis data diperkuat dengan triangulasi sumber dan kolaborasi antarpeleliti dalam proses refleksi. Dengan pendekatan ini, penelitian tidak hanya bertujuan menguji efektivitas media sedotan dalam pembelajaran matematika, tetapi juga untuk mengembangkan pemahaman yang lebih dalam tentang bagaimana siswa SD membangun konsep operasi bilangan.

Analisis data dalam penelitian ini dilakukan secara kualitatif dengan menerapkan teknik triangulasi sumber, sebagaimana dijelaskan oleh [31]. Triangulasi sumber adalah pendekatan analisis data yang memanfaatkan berbagai sumber informasi untuk menguji konsistensi temuan, memperkaya interpretasi, dan mengurangi bias peneliti. Sumber data yang digunakan dalam penelitian ini termasuk pengamatan langsung selama proses pembelajaran, dokumentasi foto yang menangkap momen penting dalam aktivitas, portofolio Lembar Kerja Siswa (LKS) yang mencatat tugas dan hasil kerja siswa, dan wawancara yang memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang perspektif dan pengalaman siswa.

Setiap sumber data dievaluasi dan dibandingkan secara menyeluruh untuk menemukan kesamaan, perbedaan, dan hubungan antara data yang dikumpulkan. Proses ini memungkinkan peneliti mengonfirmasi keabsahan hasil mereka sekaligus menangkap detail yang mungkin terlewatkan jika mereka hanya bergantung pada satu jenis data. Pemahaman tentang respons, keterlibatan, dan perkembangan siswa dalam kerangka Hypothetical Learning Trajectory (HLT) menjadi lebih utuh, mendalam, dan terverifikasi melalui penerapan triangulasi. Ini memastikan bahwa kualitas hasil penelitian tetap terjaga.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini, kami merancang *Hypothetical Learning Trajectory* (HLT) tentang operasi pengurangan untuk siswa kelas 1 SD, yang terdiri dari 4 aktivitas (Aktivitas A-D). Setiap aktivitas menggunakan lembar kerja. Selain itu, siswa juga diberikan sedotan dan karet gelang. Setiap aktivitas dijelaskan pada bagian berikut.

A. Aktivitas A: Mengidentifikasi awal konteks sedotan sebagai objek konkret

Dengan menggunakan sedotan sebagai representasi nyata, aktivitas ini membantu orang memahami nilai tempat. Setelah mereka mengelompokkan sedotan ke dalam bundel sepuluh, siswa diminta untuk mengidentifikasi sisa sedotan sebagai satuan. Selama siklus pertama, beberapa siswa gagal membentuk bundel sepuluh sedotan dengan benar. Ini menunjukkan bahwa konsep puluhan masih dipahami secara intuitif. Siswa sebagian besar mulai mampu

membedakan antara puluhan dan satuan secara lebih sistematis setelah guru memberikan penekanan ulang dan klarifikasi instruksi pada siklus kedua.

Guru memperlihatkan segenggam sedotan dan bertanya:

Guru: “Kalau ini kita hitung satu-satu, lama sekali. Bagaimana cara kalian membuatnya lebih mudah?”

Siswa: “Dibuat ikat sepuluh dulu, Bu.”

Guru: “Mengapa sepuluh?”

Siswa: “Karena sepuluh itu satu puluhan.”

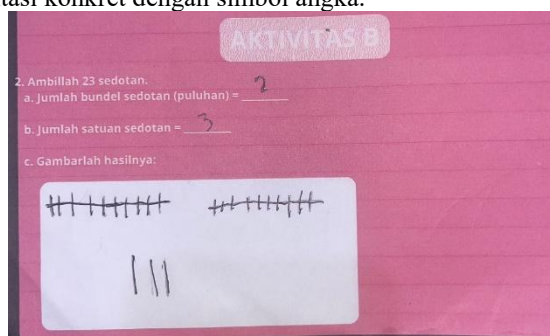
Interaksi guru dan siswa menunjukkan proses negosiasi makna yang penting dalam pembentukan konsep nilai tempat. Ketika siswa menyatakan bahwa sepuluh sedotan membentuk satu puluhan, terjadi pergeseran dari strategi menghitung satu per satu menuju strategi pengelompokan yang lebih efisien. Temuan ini sejalan dengan [14] yang menegaskan bahwa pengalaman manipulatif berperan sebagai jembatan kognitif dalam transisi dari strategi informal menuju pemahaman nilai tempat yang lebih terstruktur. Namun, berbeda dengan temuan [14] yang melaporkan konsistensi pengelompokan sejak tahap awal, pada penelitian ini siswa masih memerlukan intervensi guru pada siklus pertama untuk mencapai stabilitas konsep. Perbedaan ini mengindikasikan bahwa konteks kelas dan pengalaman awal siswa memengaruhi kecepatan internalisasi konsep.



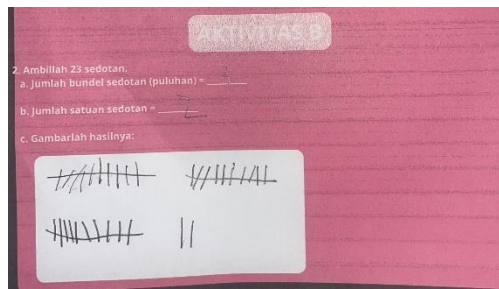
Gambar 1. Proses siswa mengelompokkan sedotan menjadi bundel puluhan dan sedotan tunggal pada Aktivitas A. Gambar 1 memperlihatkan proses siswa mengelompokkan sedotan menjadi bundel puluhan dan sedotan tunggal sebagai representasi awal nilai tempat. Jika dibandingkan dengan studi-studi sebelumnya yang menggunakan manipulatif serupa, aktivitas ini menunjukkan pola perkembangan yang sejalan, tetapi dengan kebutuhan scaffolding yang lebih eksplisit pada tahap awal. Ketika siswa mulai secara verbal menyebut “ini puluhan”, hal tersebut menandai awal internalisasi simbolik, sebagaimana diprediksi dalam lintasan belajar HLT, di mana aktivitas konkret secara bertahap mengarah pada pembentukan representasi mental dan simbolik.

B. Aktivitas B: Mengidentifikasi nilai tempat dua digit bilangan

Pada aktivitas ini, siswa diminta menyusun bilangan dua digit, misalnya 23, dengan menggunakan bundel puluhan dan sedotan satuan. Aktivitas ini berfungsi sebagai jembatan konseptual antara pengalaman manipulatif pada Aktivitas A dan representasi simbolik bilangan. Secara umum, pada kedua siklus pembelajaran siswa mampu merepresentasikan bilangan dua digit, namun perbedaan yang menonjol tampak pada tingkat konsistensi dan kemampuan mengaitkan representasi konkret dengan simbol angka.



Gambar 2. Hasil kerja siswa berkemampuan tinggi



Gambar 3. Hasil kerja siswa berkemampuan rendah

Gambar 2 menunjukkan hasil kerja siswa berkemampuan tinggi yang mampu mengonversi simbol angka ke dalam bundel puluhan dan satuan secara mandiri, serta menjelaskan alasan matematis di balik komposisi bilangan tersebut. Hal ini mengindikasikan bahwa siswa telah membangun pemahaman struktural tentang nilai tempat, di mana digit pertama dipahami sebagai jumlah puluhan dan digit kedua sebagai jumlah satuan. Sebaliknya, hasil kerja siswa berkemampuan rendah sering mengubah digit, seperti membaca 23 sebagai "tiga puluh dua", seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3. Kesalahan ini menunjukkan bahwa siswa masih bergantung pada urutan verbal angka yang dihafal daripada struktur nilai tempat, secara kognitif. Sebagai kumpulan simbol yang tidak memiliki makna kuantitatif yang terintegrasi, posisi digit belum dianggap sebagai pembawa nilai yang berbeda.

Temuan ini memperkuat hasil penelitian sebelumnya yang menyatakan bahwa pemahaman nilai tempat berkembang melalui pengalaman manipulatif yang berulang dan reflektif, bukan melalui hafalan simbol semata [20]. Ketidakmampuan siswa berkemampuan rendah dalam menjaga urutan puluhan–satuan menunjukkan bahwa proses transisi dari representasi konkret ke simbolik masih belum tuntas. Dengan demikian, aktivitas ini menegaskan pentingnya pengulangan aktivitas manipulatif yang disertai diskusi reflektif agar siswa dapat beralih dari cara berpikir berbasis urutan verbal menuju pemahaman struktural nilai tempat sesuai lintasan belajar yang diharapkan dalam HLT.

C. Aktivitas C: Memahami konsep operasi hitung penjumlahan dua bilangan

Aktivitas ini dibagi ke dalam dua sub-aktivitas, yaitu penjumlahan dua digit tanpa menyimpan dan penjumlahan dua digit dengan menyimpan (regrouping), yang dirancang untuk mengungkap perkembangan pemahaman siswa secara bertahap sesuai lintasan HLT.

Pada Sub Aktivitas C.1, siswa mempelajari penjumlahan dua digit tanpa menyimpan, ketika hasil satuan kurang dari 10. Mayoritas siswa mampu menggabungkan dua kelompok sedotan, kemudian menghitung puluhan dan satuan secara langsung tanpa perlu membentuk bundel baru. Pemahaman awal siswa tentang independensi hasil operasi terhadap urutan pengelompokan ditunjukkan oleh strategi hitung yang fleksibel dan keputusan siswa untuk menggabungkan satuan terlebih dahulu karena dianggap lebih mudah. Hasil ini sejalan dengan [20] yang menyatakan bahwa siswa cenderung menggunakan strategi informal yang efektif pada tahap awal HLT ketika konteks manipulatif tetap sesuai dengan struktur bilangan yang dihadapi. Namun, perbedaan tetap terlihat pada siswa berkemampuan rendah yang masih menghitung ulang dari nol, menandakan bahwa pemahaman nilai tempat belum sepenuhnya terinternalisasi.

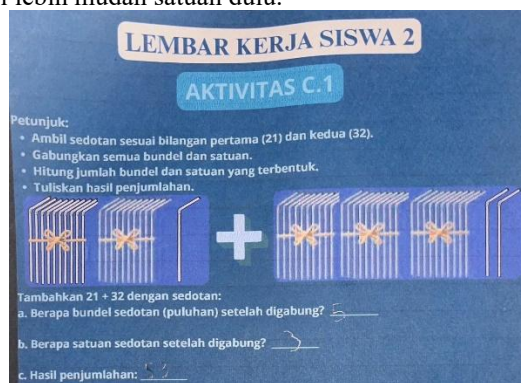
Guru bertanya tentang apa yang akan dilakukan pada aktivitas ini:

Guru: “21 + 32. Apa yang kalian lakukan dulu?”

Siswa: “Gabungkan satuannya dulu, lalu puluhannya.”

Guru: “Mengapa tidak puluhan dulu?”

Siswa: “Hasilnya tetap sama, tapi lebih mudah satuan dulu.”



Gambar 4. Hasil kerja siswa pada penjumlahan dua digit tanpa menyimpan (Aktivitas C.1)

Gambar 4 menunjukkan bahwa siswa dapat menggabungkan dua kelompok sedotan dan menghitung puluhan serta satuan tanpa membuat bundel baru.

Sub Aktivitas C.2 bertujuan untuk menemukan penjumlahan dua digit bilangan dengan menyimpan yang hasil satuannya ≥ 10 . Ini menjadi titik kritis dalam pembelajaran. Siswa harus memahami bahwa ketika satuan mencapai ≥ 10 , maka 10 satuan harus dibuat bundel baru.



Gambar 5. Proses *regrouping* pada penjumlahan dua digit dengan menyimpan (Aktivitas C.2).

Gambar 5 memperlihatkan bagaimana siswa membentuk bundel baru dari sepuluh satuan dan mengintegrasikannya ke dalam kelompok puluhan. Jika dibandingkan dengan temuan [6], pola ini menunjukkan kesesuaian yang kuat: proses bundling bukan sekadar langkah prosedural, melainkan sarana bagi siswa untuk memahami restrukturisasi bilangan secara konseptual. Siswa berkemampuan tinggi mampu melakukan *regrouping* secara mandiri, sementara siswa berkemampuan sedang memerlukan prompting untuk menyadari bahwa “satuan yang terlalu banyak” harus diubah menjadi puluhan. Sementara itu, kebingungan siswa berkemampuan rendah mengindikasikan bahwa tanpa dukungan konkret yang berkelanjutan, *regrouping* mudah dipersepsi sebagai aturan mekanis yang terputus dari makna nilai tempat.

Secara keseluruhan, temuan pada Aktivitas C menunjukkan bahwa HLT yang dirancang memiliki koherensi dengan lintasan belajar aktual siswa, terutama pada transisi dari penjumlahan tanpa menyimpan ke penjumlahan dengan menyimpan. Dibandingkan dengan penelitian [6] dan [20], hasil penelitian ini menegaskan bahwa integrasi konteks manipulatif dalam HLT tidak hanya membantu siswa mengikuti prosedur, tetapi juga memperkuat pemahaman struktural bilangan. Namun, perbedaan tingkat kebutuhan scaffolding antar siswa menegaskan pentingnya adaptasi HLT agar lebih responsif terhadap variasi kemampuan kognitif siswa kelas rendah.

D. Aktivitas D: Memahami konsep operasi hitung pengurangan dua bilangan

Aktivitas pengurangan dirancang secara bertahap, dimulai dari pengurangan tanpa meminjam hingga pengurangan dengan meminjam (*borrowing*) sebagai bentuk lintasan belajar yang meningkat kompleksitasnya. Pada Sub Aktivitas D.1, siswa dihadapkan pada pengurangan dua digit tanpa meminjam, ketika hasil satuan masih bernilai positif.

Guru bertanya kepada siswa tentang bundel puluhan atau satuan yang akan diambil:

Guru: “ $54 - 23$. Apa yang perlu kita ambil?”

Siswa: “Ambil 3 satuan dulu, lalu dua bundel puluhan.”

Seperti yang ditunjukkan oleh interaksi guru dan siswa, sebagian besar siswa berkemampuan tinggi dan sedang mampu mengurangi secara langsung melalui representasi fisik sedotan dengan mengambil satuan terlebih dahulu, kemudian puluhan. Namun, siswa berkemampuan rendah masih bergantung pada keteraturan penataan sedotan, menunjukkan bahwa struktur nilai tempat belum sepenuhnya terinternalisasi dan membutuhkan dukungan visual yang kuat.

Subaktivitas D.2 adalah tahap yang paling sulit karena memerlukan pemahaman konsep meminjaman dalam kasus jumlah satuan yang tidak mencukupi. Pada kasus seperti $42 - 19$, siswa harus memahami bahwa satu bundel puluhan dapat dipecah menjadi sepuluh satuan.

Guru memfasilitasi pertanyaan pemicu:

Guru: “Kita punya 2 satuan, tapi harus mengurangi 9. Apa yang bisa kita lakukan?”

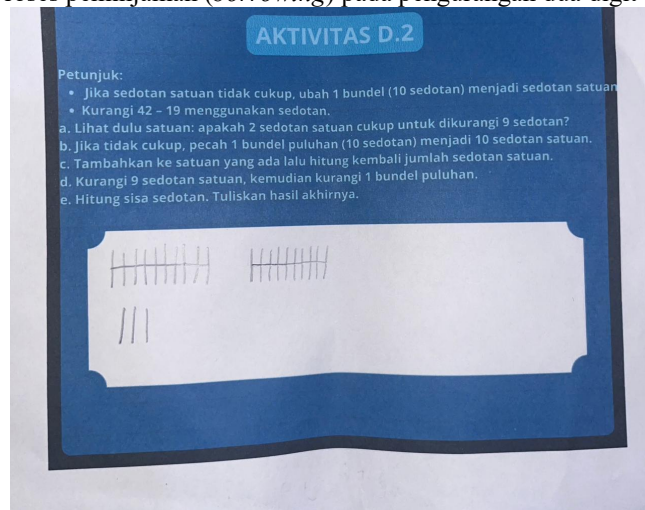
Siswa berkemampuan sedang: “Pinjam puluhan... jadi pecah bundelnya.”

Siswa berkemampuan rendah: “Tidak bisa Bu, kurang sedotannya...”

Guru kemudian menunjukkan pemecahan bundel, hingga siswa rendah mulai menyadari transformasi “1 puluhan → 10 satuan”.



Gambar 6. Proses peminjaman (*borrowing*) pada pengurangan dua digit (Aktivitas D.2)



Gambar 7. Hasil kerja siswa

Gambar 6 memperlihatkan proses siswa memecah satu bundel puluhan sebagai respons terhadap pertanyaan pemicu guru, sementara Gambar 7 menunjukkan variasi hasil kerja siswa berdasarkan tingkat kemampuan. Siswa berkemampuan tinggi mampu memaknai *borrowing* sebagai transformasi nilai tempat, siswa berkemampuan sedang memerlukan manipulasi konkret berulang, sedangkan siswa berkemampuan rendah awalnya gagal memahami bahwa puluhan dapat diubah menjadi satuan.

Temuan ini tidak hanya mengonfirmasi hasil penelitian sebelumnya yang menekankan pentingnya manipulatif konkret dalam memahami *borrowing*, tetapi juga memperluasnya dengan menunjukkan bagaimana lintasan HLT yang dirancang secara eksplisit mampu memetakan perbedaan kebutuhan scaffolding antar siswa. Dengan demikian, penelitian ini memperluas temuan sebelumnya dengan memperlihatkan bahwa integrasi sistematis antara HLT dan manipulatif sedotan memungkinkan identifikasi titik kritis kegagalan konseptual pada pengurangan dua digit, khususnya pada transformasi nilai tempat, yang belum banyak diungkap secara rinci dalam studi-studi terdahulu.

Pengurangan membawa tantangan konseptual yang lebih kompleks dibanding penjumlahan. Temuan penelitian menunjukkan bahwa konsep peminjaman baru dapat dipahami secara bermakna ketika siswa menyaksikan dan melakukan sendiri proses perubahan satu bundel puluhan menjadi sepuluh satuan. Hal ini menguatkan hasil penelitian [16] yang menegaskan bahwa strategi informal cenderung lebih stabil ketika siswa terlibat langsung dalam manipulasi objek konkret. Dengan demikian, keberhasilan pembelajaran pengurangan tidak semata ditentukan oleh ketepatan prosedur, melainkan oleh pengalaman konseptual yang dialami siswa selama proses transformasi nilai tempat.

Secara keseluruhan, rangkaian aktivitas dari A hingga D menunjukkan bahwa ada korelasi yang kuat antara HLT yang dirancang dan HLT yang benar-benar terjadi di kelas. Dengan menggunakan sedotan, siswa dapat secara bertahap beralih dari eksekusi konkret ke representasi simbolik. Ini sejalan dengan prinsip pendidikan matematika realistik dan konsep modeling yang muncul. Penelitian ini memiliki beberapa keterbatasan yang perlu diperhatikan.

Pertama dan terpenting, siswa yang berkemampuan rendah tidak memiliki kesempatan yang memadai untuk mengeksplorasi manipulatif karena keterbatasan waktu pembelajaran. Kedua, karena subjek penelitian terbatas pada satu konteks kelas dan jenjang tertentu, hasilnya harus digeneralisasi dengan hati-hati. Ketiga, konteks penggunaan sedotan sebagai media sangat bergantung pada kemampuan guru untuk menyediakan scaffolding. Akibatnya, tingkat keberhasilan HLT mungkin berbeda tergantung pada sekolah atau karakteristik siswa yang berbeda. Refleksi atas keterbatasan ini membuka peluang penelitian lanjutan untuk menguji HLT berbasis manipulatif dalam konteks yang lebih luas dan durasi pembelajaran yang lebih panjang.

V. SIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa pengembangan *Hypothetical Learning Trajectory* berbasis konteks sedotan mampu memfasilitasi pemahaman konseptual siswa sekolah dasar dalam operasi penjumlahan dan pengurangan dua digit. Melalui rangkaian aktivitas yang sistematis, siswa secara bertahap berpindah dari representasi konkret menuju pemahaman simbolik yang lebih matang mengenai nilai tempat, proses menyimpan, dan proses meminjam. Sedotannya terbukti berguna untuk membantu siswa memvisualisasikan transformasi satuan-puluhan dan mengonstruksi struktur bilangan. Hasil dari eksperimen pembelajaran dua siklus menunjukkan bahwa rute belajar yang sebenarnya selaras dengan rute yang dirancang, meskipun siswa dengan kemampuan rendah memerlukan scaffolding yang lebih kuat.

Tetapi subjek penelitian, durasi implementasi, dan penggunaan satu jenis media manipulatif adalah keterbatasan. Oleh karena itu, penelitian selanjutnya disarankan untuk menguji HLT serupa pada konteks kelas yang lebih beragam serta menggunakan manipulatif lain, seperti blok dienes, kartu bilangan, atau media digital interaktif. Perluasan konteks dan variasi manipulatif tersebut berpotensi memperkaya model HLT dan memperkuat generalisasi temuan pada pembelajaran aritmetika dasar di sekolah dasar.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan apresiasi kepada Kepala Sekolah dan guru kelas di SDN Wonoplintahan 2 yang telah memberikan izin serta dukungan penuh selama pelaksanaan penelitian. Terima kasih juga disampaikan kepada seluruh siswa yang berpartisipasi secara aktif dalam setiap kegiatan pembelajaran. Penghargaan diberikan kepada rekan-rekan peneliti dan pihak institusi yang telah membantu proses observasi, dokumentasi, serta diskusi ilmiah selama penelitian berlangsung.

REFERENSI

- [1] R. S. Siegler and H. Lortie-Forgues, "Conceptual knowledge of fractions and decimals," *J. Educ. Psychol.*, vol. 112, no. 3, pp. 459–472, 2020, doi: 10.1037/edu0000374.
- [2] J. Mulligan, L. English, and J. Watson, "Whole-number knowledge and early arithmetic strategies in young learners," *Math. Educ. Res. J.*, vol. 32, no. 4, pp. 531–550, 2020, doi: 10.1007/s13394-019-00277-1.
- [3] J. Cai, S. Hwang, C. Jiang, and E. A. Silver, "Mathematical thinking and reasoning: A review of theory and research," *J. Res. Math. Educ.*, vol. 52, no. 3, pp. 221–256, 2021, doi: 10.5951/jresmetheduc-2021-0056.
- [4] NCTM, *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2020.
- [5] OECD, "PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning," 2023. [Online]. Available: <https://www.oecd.org/pisa/publications/pisa-2022-results.htm>
- [6] D. M. Carvalho, "Understanding regrouping through concrete modeling," *Math. Educ. Res. J.*, vol. 34, no. 3, pp. 457–471, 2022.
- [7] B. Rittle-Johnson and M. Schneider, "Developing conceptual and procedural knowledge," *Educ. Psychol.*, vol. 55, no. 1, pp. 1–14, 2020.
- [8] J. A. Van de Walle, K. S. Karp, and J. M. Bay-Williams, *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally*, 11th ed. Pearson, 2022.
- [9] K. C. Fuson and A. Murata, "Blending cultural models and mathematics teaching: Moving from algorithms to understanding," *ZDM Math. Educ.*, vol. 53, no. 1, pp. 107–121, 2021, doi: 10.1007/s11858-020-01193-5.
- [10] A. Kullberg, U. Runesson Kempe, and F. Marton, "Teaching with variation: Research-based strategies for effective learning," *Scand. J. Educ. Res.*, vol. 66, no. 2, pp. 203–220, 2022, doi: 10.1080/00313831.2021.1952432.
- [11] K. Gravemeijer and J. Terwel, "Realistic mathematics education as a new theory of mathematics education," *Educ. Stud. Math.*, vol. 107, no. 1, pp. 145–161, 2021, doi: 10.1007/s10649-021-10043-2.
- [12] A. Bakker, *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge, 2020.

- [13] W. Widjaja, S. Groves, and B. Doig, “Enhancing primary students’ number sense through contextualized tasks,” *Math. Educ. Res. J.*, vol. 33, no. 2, pp. 299–316, 2021, doi: 10.1007/s13394-020-00324-3.
- [14] F. Van Nes and M. Doorman, “Students’ reasoning on place value using realistic contexts,” *Int. J. STEM Educ.*, vol. 7, no. 1, pp. 1–18, 2020, doi: 10.1186/s40594-020-00240-9.
- [15] M. A. Simon, R. Tzur, K. Heinz, M. Kinzel, and M. Smith, “Explicating a learning trajectory for linear measurement,” *J. Res. Math. Educ.*, vol. 53, no. 2, pp. 134–159, 2022, doi: 10.5951/jresmetheduc-2022-0032.
- [16] M. Van den Heuvel-Panhuizen, A. Kolovou, and A. Robitzsch, “Diagnosing students’ informal strategies for subtraction,” *Educ. Stud. Math.*, vol. 107, no. 2, pp. 279–300, 2021, doi: 10.1007/s10649-021-10044-1.
- [17] B. J. Dougherty, A. Flores, and C. C. Jordan, “Integrating hypothetical learning trajectories with lesson study: Enhancing teaching practices,” *Math. Teach. Educ.*, vol. 11, no. 2, pp. 134–152, 2023, doi: 10.5951/mathteacheduc.11.2.0134.
- [18] D. H. Clements and J. Sarama, *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*, 2nd ed. Routledge, 2020.
- [19] A. Fauzan, C. D. Andita, G. Rada, A. Zafirah, and A. H. Bin Abdullah, “Developing RME-Based Learning Trajectory for Teaching Addition to A Dyscalculia Student in Elementary School,” *J. Didakt. Mat.*, vol. 9, no. 1, pp. 39–58, 2022, doi: 10.24815/jdm.v9i1.25340.
- [20] E. J. Mutaqin, T. Herman, W. Wahyudin, and N. N. Muslihah, “Hypothetical Learning Trajectory in Place Value Concepts in Elementary School,” *Mosharafa J. Pendidik. Mat.*, vol. 12, no. 1, pp. 125–134, 2023, doi: 10.31980/mosharafa.v12i1.1313.
- [21] M. Stephan and D. Akyuz, “Design-based research and HLT development for arithmetic,” *ZDM Math. Educ.*, 2023.
- [22] M. A. Simon, R. Tzur, K. Heinz, and M. Kinzel, “Hypothetical learning trajectories in mathematics education,” *Math. Educ. Res. J.*, vol. 32, no. 1, pp. 65–87, 2020.
- [23] D. W. Maulida, M. H. Mahmudah, and N. Nuryadin, “Problem-solving ability in realistic mathematics education based on hypothetical learning trajectory,” *JP2M (Jurnal Pendidik. dan Pembelajaran Mat.)*, 2025.
- [24] S. Leinwand, B. J. Dougherty, and K. B. Chval, “Mathematics instruction and tasks that matter,” *Educ. Leadersh.*, vol. 79, no. 4, pp. 20–27, 2022, [Online]. Available: <https://www.ascd.org/el/articles/mathematics-instruction-and-tasks-that-matter>
- [25] R. I. I. Putri, Zulkardi, and Y. Hartono, “Designing learning trajectories of place value using bundle context,” *J. Math. Educ.*, vol. 11, no. 2, pp. 157–168, 2020, doi: 10.22342/jme.11.2.11753.157-168.
- [26] K. and C. Gravemeijer P., “Design research from a learning design perspective BT - Educational design research,” Routledge, 2006, pp. 17–51.
- [27] N. F. and S. Fuadiah D., “Hypothetical learning trajectory pada pembelajaran bilangan negatif berdasarkan teori situasi didaktis di sekolah menengah,” *Mosharafa J. Pendidik. Mat.*, vol. 6, no. 1, pp. 77–88, 2017, [Online]. Available: <https://journal.institutpendidikan.ac.id/index.php/mosharafa/article/view/425>
- [28] I. Fauzi, “Desain didaktis operasi hitung penjumlahan dan pengurangan pecahan di kelas 5 sekolah dasar,” 2020, Repository Universitas Pendidikan Indonesia. [Online]. Available: <https://repository.upi.edu/50067>
- [29] M. B. and H. Miles A. M. and Saldaña, J., *Qualitative Data Analysis: A Methods Sourcebook*, 3rd ed. SAGE Publications, 2014.
- [30] E. and H. Zuliana N. A. and Aji, N. P., “Pendekatan PMRI berbantuan House Counting untuk operasi hitung penjumlahan dan pengurangan pada bilangan cacah kelas II,” *Inspiramatika*, vol. 17, no. 1, pp. 33–45, 2025, [Online]. Available: <https://e-jurnal.unisda.ac.id/index.php/Inspiramatika/article/view/8644>
- [31] M. Q. Patton, *Qualitative Research and Evaluation Methods*, 3rd ed. Thousand Oaks, CA: Sage Publications, 2002.

Conflict of Interest Statement:

The author declares that the research was conducted in the absence of any commercial or financial relationships that could be construed as a potential conflict of interest.